

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЛЕСОТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени С. М. Кирова»

Кафедра физики

Лабораторная работа № 2

ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСКОРЕНИЯ
СВОБОДНОГО ПАДЕНИЯ
С ПОМОЩЬЮ МАТЕМАТИЧЕСКОГО
МАЯТНИКА

Методические указания
к лабораторной работе по разделу
«Механика и молекулярная физика»
для студентов всех специальностей
и всех форм обучения

Санкт-Петербург
2011

Рассмотрены и рекомендованы к изданию
учебно-методической комиссией факультета
химической технологии и биотехнологии
Санкт-Петербургского государственного лесотехнического университета
30 ноября 2011 г.

Составители:

кандидат технических наук, доцент **В. И. Михасенко**,
кандидат физико-математических наук, доцент **Л. П. Казакова**

Отв. редактор

доктор физико-математических наук, профессор **С. М. Герасюта**

Рецензент

кафедра физики СПбГЛТУ

Определение ускорения свободного падения с помощью математического маятника: методические указания к лабораторной работе / сост.: В. И. Михасенко, Л. П. Казакова. – СПб.: СПбГЛТУ, 2011. – 12 с.

Методические указания к лабораторной работе в практикуме по физике по разделу «Механика и молекулярная физика» предназначены для студентов обучающихся на дневном и заочном отделениях по всем специальностям.

Теоретические пояснения

Колебаниями называют процессы, отличающиеся той или иной степенью повторяемости. Колебательные процессы могут происходить как в механических системах (колебания маятника часов, вибрации деталей различных машин и конструкций и т. д.), так и в немеханических системах (акустические волны, переменный ток в электрических цепях и т. д.).

Колебания называются периодическими, если значения физических величин, характеризующих колебательную систему и изменяющихся в процессе колебаний, повторяются через равные промежутки времени T , т. е. изменяются во времени согласно зависимости

$$x = f(t) = f(t + T) = f(t + NT),$$

где N – числа натурального ряда, $N = 1, 2, 3, \dots$.

Период колебаний T – величина, равная промежутку времени, в течение которого система совершает одно полное колебание, т. е. промежутку времени, в течение которого система проходит все возможные состояния и возвращается в исходное состояние. Период легко определить экспериментально, как отношение промежутка времени t_1 , в течение которого совершается некоторое количество полных колебаний N_1 , к количеству этих колебаний:

$$T = t_1 / N_1.$$

Частота колебаний ν – величина, равная числу колебаний, совершаемых системой за единицу времени, и определяемая как:

$$\nu = N_1 / T_1 = 1 / T.$$

В СИ период колебаний измеряется в секундах (с), а частота в герцах (Гц).

1 Гц – это частота такого колебательного процесса, когда за одну секунду совершается одно полное колебание.

В механических системах величину, равную смещению (отклонению) колеблющегося элемента системы (тела) от положения равновесия, обозначают « x »^{*} и она измеряется в единицах длины.

Наиболее распространенным случаем колебаний являются гармонические колебания. Это такие колебания, при которых смещение тела от положения равновесия изменяется по синусоидальному (гармоническому) закону от времени, согласно выражению:

* То есть « x » – это координата тела, определяемая с помощью оси, начало которой совмещено с положением, в котором находится колеблющееся тело при равновесии системы.

$$x = A \sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi_0\right) = A \sin(\omega t + \varphi_0), \quad (1)$$

или

$$x = A \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi_{0,1}\right) = A \cos(\omega t + \varphi_{0,1}), \quad \varphi_{0,1} = \varphi_0 - \frac{\pi}{2},$$

где A – амплитуда – величина, равная максимальному смещению тела от положения равновесия (в «СИ» измеряется в метрах); $\omega t + \varphi_0$ – фаза – величина, которая, совместно с амплитудой, однозначно определяет смещение тела от положения равновесия в любой рассматриваемый момент времени t . Конкретно, фаза – это величина, являющаяся аргументом синусоидальной* функции; φ_0 – начальная фаза – значение фазы при $t = 0$, определяющее начальное смещение тела, от положения равновесия; ($x_0 = A \sin \varphi_0$); ω – циклическая (угловая или круговая) частота – величина, равная числу колебаний, совершаемая телом за 2π секунд ($\approx 6,28$ с).

$$(\omega = 2\pi\nu = 2\pi/T).$$

График зависимости смещения колеблющегося тела от времени представлен на рис. 1.

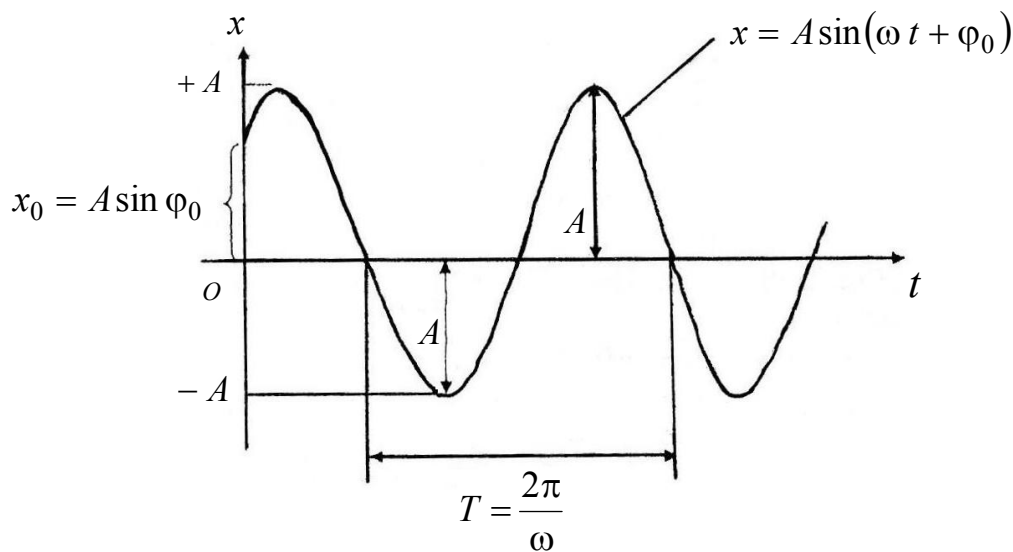


Рис. 1. График зависимости смещения от времени при гармоническом колебательном движении

Колебания реализуются в системах, обладающих свойствами упругости и инертности, то есть содержащих элементы, обладающие упругостью, и элементы, обладающие инертностью (массой), например, в простейшем

* Синусоидальными функциями принято называть синус и косинус. В математике синус и косинус также называют гармоническими функциями.

случае пружина с закрепленным на ней грузом (телом) – пружинный маятник. Если такую систему вывести из состояния равновесия внешним воздействием и далее предоставить самой себе, то система начнет совершать свободные (или собственные) колебания. При отклонении системы от положения равновесия, благодаря упругости, в системе возникают внутренние силы, стремящиеся вернуть колеблющееся тело в начальное положение, но благодаря инертности, тело не останавливается, а по инерции проскакивает положение равновесия, и отклоняется от него в противоположную сторону. Это отклонения вновь сопровождается возникновением внутренних сил, возвращающих тело к равновесию с противоположной стороны и в дальнейшем, также проскакиваемом по инерции. В результате такого совместного проявления эффектов упругости и инертности в системе возникает повторяющееся во времени движение около положения равновесия, то есть возникают свободные колебания, период которых зависит от коэффициента упругости упругого элемента (пружины) и инертности инертного элемента (массы тела).

Возвращающая сила может иметь различное происхождение – это силы упругости, возникающие в соответствии с законом Гука при деформации деталей конструкций (в частности пружин), составляющие сил тяжести на направление, касательное к траектории движения груза в математическом и физическом маятниках и т. д. В дальнейшем, для конкретности, рассмотрим пружинный маятник, для которого величина возвращающей силы $F_{\text{возвр}}$, определяемая в соответствии с законом Гука, пропорционально смещению:

$$F_{\text{возвр}} = -kx .$$

Знак «минус» учитывает, что направление возвращающей силы противоположно направлению смещения, то есть сила стремится вернуть тело в положение равновесия.

Коэффициент пропорциональности k – величина, называемая коэффициентом упругости системы, численно равная силе, возникающей при единичном смещении колеблющегося тела от положения равновесия. В механических системах k измеряется в Н/м [k] = Н/м .

Покажем, что, если силы сопротивления столь малы, что ими можно пренебречь, и величина возвращающей силы пропорциональна смещению, то свободные колебания, возникающие в системе, будут гармоническими.

На колеблющееся тело массой m действует одна лишь возвращающая сила и сообщает ему ускорение a , определяемое на основании второго закона динамики:

$$ma = F_{\text{возвр}} \quad \text{или} \quad ma = -kx .$$

Учитывая, что ускорение равно второй производной от смещения по времени $a = \frac{d^2x}{dt^2}$, получим:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0.$$

Или, разделив обе части уравнения на m , имеем:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0. \quad (2)$$

Это дифференциальное уравнение 2-го порядка, обыкновенное, с постоянными коэффициентами и с нулевой правой частью.

Как известно из математики, решение этого уравнения, показывающее, как от времени t изменяется смещение x , описывается синусоидальной функцией и имеет вид:

$$x = c_1 \sin \left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + c_2 \right), \quad (3)$$

где c_1 и c_2 – константы, значение которых определяются из начальных условий (конкретней – начальным смещением, а также значением и временем действия силы, выведшей систему из равновесия).

Сравнивая выражение (3) с выражением (1), видим, что константа c_1 есть амплитуда колебаний A , c_2 – начальная фаза φ_0 , а угловая частота и период колебаний системы равны:

$$\omega = \sqrt{k/m} \quad \text{или} \quad \omega^2 = k/m; \\ T = 2\pi\sqrt{m/k}. \quad (4)$$

Поскольку решение уравнения (2) описывает гармонические колебания, то это уравнение (2) (а также записанное в форме $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2x = 0$) называют **дифференциальным уравнением гармонического колебательного движения**.

Из формулы (4) видно, что период (и, соответственно циклическая частота) собственных колебаний системы зависит только от ее упругих и инертных свойств, т. е. от ее коэффициента упругости и массы. Период не зависит от амплитуды и характеристик внешнего воздействия, то есть силы, которая вывела систему из равновесия.

Простейшей механической колебательной системой является математический маятник. Это тело, подвешенное на невесомой, нерастяжимой нити, длина которой значительно больше размеров тела, так что тело можно считать материальной точкой (рис. 2).

Как видно из рис. 2, маятник возвращается к положению равновесия под действием составляющей силы тяжести на направление вдоль касательной к его траектории и равной:

$$|F_{\text{возвр}}| = mg \sin \alpha .$$

Как известно из математики, при достаточно малых углах отклонения $\alpha \leq 0,1$ рад. ($\alpha \leq 6^\circ$): $\sin \alpha = \alpha = x/l$.

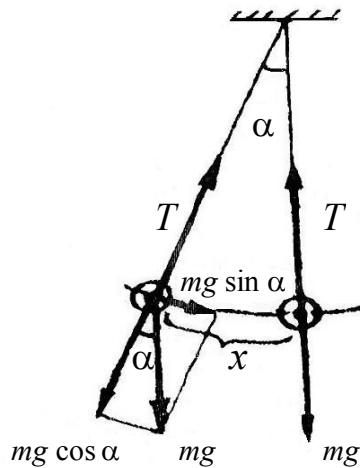


Рис. 2. Математический маятник

Тогда

$$|F_{\text{возвр}}| = \frac{mg}{l} x .$$

Сравнивая это выражение с формулой $F_{\text{возвр}} = -kx$, получим, что при малых отклонениях $k = mg/l$, и, соответственно, период малых колебаний математического маятника равен:

$$T = 2\pi\sqrt{m/k} = 2\pi\sqrt{ml/mg} = 2\pi\sqrt{l/g} . \quad (5)$$

Таким образом, период свободных колебаний математического маятника зависит только от длины нити и величины ускорения свободного падения в месте нахождения маятника. Отметим также, что период не зависит от его массы. Это получилось из-за того, что возвращающая сила для математического маятника и, соответственно, коэффициент « k » в свою очередь оказались пропорционально массе.

Из формулы (5) вытекает возможность определения величины ускорения свободного падения путем определения периода малых свободных колебаний математического маятника с известной длиной нити l , согласно выражению:

$$g = 4\pi^2 l / T^2 = 4\pi^2 l N^2 / t^2 . \quad (6)$$

Величина g не одинакова в разных точках Земли. Наибольшее значение имеет на полюсе ($983,22 \text{ см/с}^2$), наименьшее – на экваторе ($978,04 \text{ см/с}^2$). Зависимость ускорения свободного падения от географической широты местности объясняется суточным вращением Земли и ее сплюснутостью на полюсах. Кроме того, на величину g оказывает влияние различие плотностей геологических пород, залегающих в недрах Земли. Использование этой зависимости лежит в основе метода разведки полезных ископаемых по изменениям значений ускорения свободного падения.

Цель работы, описание установки и метода измерения

Целью настоящей работы является определение ускорения свободного падения в Санкт-Петербурге в соответствии с формулой (5), путем измерения периода малых свободных колебаний математического маятника.

Маятником служит шарик, укрепленный на нити, длину которой можно изменять. Длина маятника равна расстоянию от точки подвеса до центра тяжести шарика, совпадающего с его геометрическим центром.

Для получения более точного результата измеряется период при нескольких длинах нити и по полученным данным строится зависимость

$$T^2 = f(l).$$

Из формулы (6) следует, что график этой зависимости должен представлять прямую $T^2 = \frac{4\pi^2}{g}l$ (рис. 3) с тангенсом угла наклона $\text{tg } \alpha = T^2 / l$, равным $\text{tg } \alpha = 4\pi^2 / g$.

Откуда:

$$g = 4\pi^2 / \text{tg } \alpha. \quad (7)$$

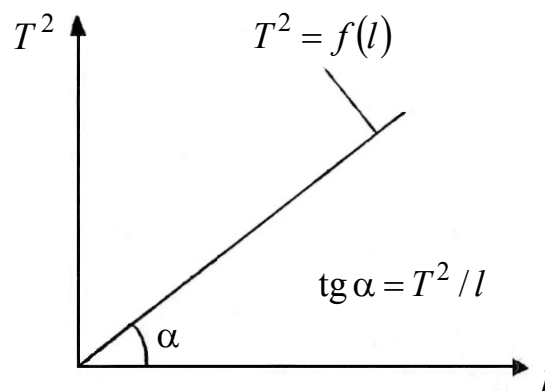


Рис. 3. График зависимости квадрата периода математического маятника от длины

Порядок выполнения работы

1. Измерить штангенциркулем диаметр шарика d .
2. Установить длину маятника $l = 30$ см, учитывая при этом, что $l = L - d/2$, где L – расстояние, измеряемое по шкале установки от точки подвеса до нижнего края шарика.
3. Отклонить маятник на небольшой угол $\alpha < 5^\circ$ и отпустить его. Определить, используя секундомер, время t , в течение которого маятник совершит $N = 20 \dots 30$ полных колебаний. При этом секундомер пускать в ход и начинать счет колебаний в момент, когда маятник находится в одном из крайних положений.
4. Рассчитать период колебаний согласно формуле $T = t/N$
5. Увеличивая каждый раз длину маятника на 10 см, таким же путем определить период еще для пяти значений длины маятника.
6. Результаты измерений и в дальнейшем результаты расчетов заносить в таблицу.
7. Построить график зависимости $T^2 = f(l)$. Используя график, определить $\text{tg } \alpha = T^2 / l$ и далее согласно формуле (7).

№ п/п	L , см	$l = L - 0,5 d$ ($d = \dots$ см)	N	t , с	$T = t/N$, с	T^2 , с ²
1	2	3	4	5	6	7
1						
2						
3						
4						
5						
6						
7						

8. Используя формулу $g = 4\pi^2 l N^2 / t^2$, вывести формулу для относительной и абсолютной погрешности определения g . Рассчитать эти погрешности для наименее точного 1-го измерения и наиболее точного последнего измерения, взяв для ориентировочной оценки абсолютную погрешность, определения длины 2 мм ($\Delta l = 0,2$ см), а для абсолютной погрешности измерения времени четверть периода колебаний ($\Delta t = 0,25 T_1$). По величине относительной погрешности убедитесь в точности метода.
9. Запишите окончательный результат по положенной формуле (с указанием ориентировочной величины абсолютной погрешности для первого измерения).

$$g = g_{\text{расч}} \pm \Delta g .$$

Контрольные вопросы

1. Напишите уравнение гармонического колебательного движения. Дайте определения величин, характеризующих это движение: амплитуды, фазы, начальной фазы, угловой частоты, частоты, периода. Каковы размерности и единицы измерения перечисленных величин?

2. Какие колебания называют свободными, и под влиянием каких факторов они возникают?

3. При каких условиях свободные колебания будут гармоническими?

4. Напишите дифференциальное уравнение гармонического колебательного движения.

5. От чего зависит период свободных колебаний? Зависит ли период от амплитуды, и если нет, то почему?

6. От чего зависит амплитуда и начальная фаза свободных колебаний?

7. Что такое математический маятник? От чего зависит период его свободных колебаний?

8. Почему период математического маятника не зависит от его массы?

9. Как влияет изменение количеств измеряемых колебаний на точность используемого метода?

Рекомендуемая литература

1. Сырников, Ю. П. Основные физические величины и законы физики: лекции. Ч. 1. / Ю. П. Сырников. – Л.: ЛТА, 1972. С. 25–26, 30.

2. Зисман, Г. А. Курс общей физики / Г. А. Зисман, О. М. Тодес. – М.: Наука, 1974. Т. 1. Гл. XIII. § 50, 51.

3. Трофимова, Т. И. Курс физики / Т. И. Трофимова. – М.: Высшая школа, 2007. § 140, 142.

Оглавление

Теоретические пояснения	3
Цель работы, описание установки и метода измерения	8
Порядок выполнения работы.....	9
Контрольные вопросы	10
Рекомендуемая литература.....	10

Составители:
Михасенко Вячеслав Иванович
Казакова Людмила Павловна

Лабораторная работа № 2

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСКОРЕНИЯ
СВОБОДНОГО ПАДЕНИЯ
С ПОМОЩЬЮ МАТЕМАТИЧЕСКОГО
МАЯТНИКА**

Методические указания
к лабораторной работе по разделу
«Механика и молекулярная физика»
для студентов всех специальностей
и всех форм обучения

Отпечатано в авторской редакции с готового оригинал-макета

Подписано в печать с оригинал-макета 13.12.11.
Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Печать трафаретная.
Уч.-изд. л. 0,75. Печ. л. 0,75. Тираж 200 экз. Заказ № 310. С 165.

Санкт-Петербургский государственный лесотехнический университет
Издательско-полиграфический отдел СПбГЛТУ
194021, Санкт-Петербург, Институтский пер., 5.